

Esercizio 4

Uno dei più semplici modelli matematici per lo studio di dinamica di popolazioni, in ipotesi di immigrazione costante nel tempo, è basato sull'ipotesi che la velocità con cui cambia il numero di individui della popolazione dal tempo t_0 al tempo t_1 è direttamente proporzionale al numero di individui presenti al tempo t_0 e dalla costante di immigrazione. Tale modello conduce alla seguente funzione:

$$N(t) = N_0 e^{rt} + \frac{I}{r} (e^{rt} - 1)$$

dove $N(t)$ descrive l'andamento della popolazione al variare del tempo t , N_0 è il numero di individui al tempo t_0 , e è il numero di Nepero (≈ 2.7182818), I è la costante di immigrazione e r è la costante legata alla nascita di nuovi individui. Nelle ipotesi che si conosca il numero di individui al tempo t_0 ($N_0=1000000$) e $t_1=1$ ($N_1=1564000$) ed il numero di immigrati I ($I=435000$) per determinare il fattore di nascita r occorre risolvere la seguente equazione

$$1564000 = 1000000 e^r + \frac{435000}{r} (e^r - 1)$$

E' possibile risolvere questa equazione con il metodo approssimato delle tangenti: data un'approssimazione iniziale r_0 si genera una successione di approssimazioni

$$r_{n+1} = r_n - \frac{1000000 e^{r_n} + \frac{435000}{r_n} (e^{r_n} - 1) - 1564000}{1000000 e^{r_n} - \frac{435000}{r_n^2} (e^{r_n} - 1) + \frac{435000}{r_n} e^{r_n}}.$$

Per stimare l'errore che si commette accettando come soluzione r_{n+1} si può utilizzare la quantità

$$\frac{|r_{n+1} - r_n|}{|r_{n+1}|}.$$

Scrivere un codice che approssimi r con errore $err < 10^{-6}$ ricevendo in input r_0 . Se in 10 iterate tale approssimazione non è raggiunta il codice termina con un messaggio di errore.

Testare il programma con $r_0=0.2$, $r_0=-2$, $r_0=4$.